Topologie Algébrique TD 4

28 Octobre 2011

4 Groupe Fondamental

Exercice 4.1 (Degré) Soit $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une application continue. On choisit un point de base x de la source, et pose l'image $y = g(x)$ comme le point de base du but. De plus, on choisit les orientations de deux cercles, *i.e.* un générateur du groupe fondamental : $\sigma_1 \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x)$ et $\sigma_2 \in \pi_1(\mathbb{S}^1, y)$. Le *degré* de g, noté $\deg(g)$, est par définition le nombre entier d satisfaisant $g_*(\sigma_1) = d\sigma_2$.

1. Vérifier que la définition de la notion de degré est indépendante du choix du point de base x.
2. Montrer que le degré est multiplicatif par rapport aux compositions : soient f, g deux applications continues composables, alors
$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$
3. Montrer que le degré est un invariant homotopique, de plus, il est l'invariant homotopique *complet* : deux applications entre deux $\mathbb{S}^1$ sont homotopes si et seulement s'ils ont le même degré.
4. Si $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est une application continue qui n'est pas surjective, montrer que $\deg(g) = 0$.
5. Donner une interprétation de la notion de degré en utilisant le relèvement $\widetilde{g} : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$.
6. Pour un point $x \in \mathbb{S}^1$, on note la cardinalité de son pré-image par
$$n(x) := |g^{-1}(x)|.$$
Montrer que
$$-\min_{x \in \mathbb{S}^1} n(x) \leq \deg(g) \leq \min_{x \in \mathbb{S}^1} n(x).$$
7. Si g est injectif, montrer que $\deg(g) = \pm 1$.

Indications:

1. En général, on a le lemme suivant de changement de point de base : soit $f : X \to Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques, soient x, x' deux points de X, et $y = f(x)$, $y' = f(x')$ ces images. On choisit un chemin γ de x' à x. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x') \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "{[\gamma]_*}"', "\simeq"] & \pi_1(Y, y') \arrow[d, "{[f\circ\gamma]_*}"', "\simeq"] \\ \pi_1(X, x) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y, y) \end{tikzcd}$$

On applique cet argument au cas $X = Y = \mathbb{S}^1$.

3. Dans la suite, on va utiliser la coordonnée angulaire de $\mathbb{S}^1$ modulo 2π. D'abord, on remarque qu'une rotation (euclidienne) de $\mathbb{S}^1$ est une application de degré 1, homotope à l'identité, autrement dit, composer avec une rotation change ni la classe d'homotopie ni le degré. Si on se donne deux endomorphismes de $\mathbb{S}^1$ homotopes $f \sim g$, quitte à composer avec certaines rotations, on peut supposer que $f(0) = g(0) = 0$. Soit $H : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$ l'homotopie entre f et g, on peut définit une autre homotopie relative à 0 entre f et g, en posant

$$\begin{aligned} H' : \mathbb{S}^1 \times I &\to \mathbb{S}^1 \\ (x,t) &\mapsto H(x,t) - H(0,t) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

En conséquence, f, g représentent le même élément dans $\pi_1(\mathbb{S}^1, 0)$, ainsi ont le même degré.

Réciproquement, soient f, g deux endomorphismes de $\mathbb{S}^1$ avec le même degré. Quitte à composer avec certaines rotations, on peut supposer que $f(0) = g(0) = 0$. Sous cet hypothèse, $\deg(f) = \deg(g)$ implique que f et g représentent le même élément dans $\pi_1(\mathbb{S}^1, 0)$. Par la définition du groupe fondamental, on obtient une homotopie (relatif à 0) entre f et g.

4. Suppose $x \in \mathbb{S}^1$ n'est pas dans l'image de g, alors g se décompose $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 - \{x\} \hookrightarrow \mathbb{S}^1$. Or $\mathbb{S}^1 - \{x\}$ est contractile, donc le morphisme induit $g_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, 0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, g(0))$ se factorise par un groupe trivial, donc g_* est le morphisme 0, *i.e.* $\deg(g) = 0$. Voir 6 comme une généralisation.

5. Sans perdre de la généralité, on peut supposer que $g(0) = 0$. On note le relèvement $\widetilde{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors $\deg(g) = \widetilde{g}(1)$. Pour la démonstration, voir le cours sur le revêtement ou la partie de calcul du groupe fondamental d'un cercle.

6. En utilisant l'interprétation dans 5, on peut voir g comme une application continue de $\widetilde{g} : I \to \mathbf{R}$ vérifiant que $\widetilde{g}(0) = 0$, et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que si $\deg(g) = \widetilde{g}(1)$ est plus grand qu'un entier positif m, alors tous les représentants dans l'intervalle $[0, m)$ d'un point $x \in \mathbb{S}^1$ sont atteins, autrement dit, g passe x au moins m fois. L'argument est analogue pour $\deg(g)$ négatif.

7. Le résultat de 6 implique que $-1 \leq \deg(g) \leq 1$. Pour exclure la possibilité de degré 0, on utilise l'interprétation dans 5 et fait un petit argument élémentaire.

Exercice 4.2 (d'Alembert-Gauß) Montrer le théorème fondamental d'algèbre : tout polynôme non-constant f à coefficient dans $\mathbf{C}$ admet une racine. En conséquence, $\mathbf{C}$ est un corps algébriquement clos.

1. Rappeler la preuve par l'analyse complexe (Théorème de Liouville).

On propose une preuve topologique. On voit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ comme une application continue, et on va démontrer que 0 est dans l'image de f. Supposons par l'absurde que $0 \notin \mathbf{Im}(f)$, on utilise la même notation $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$.

2. Considérer la famille d'application ($t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$), définie par la composition suivante :
$$g_t : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{i_t} \mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{C}^* \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1,$$
où $i_t : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{C}$ est l'inclusion définie par $e^{i\theta} \mapsto te^{i\theta}$, et r est la rétraction $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Vérifier que g fournit une homotopie entre g_{t_1} et g_{t_2} pour tous $t_1, t_2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}$;
3. Calculer le degré de g_0 ;
4. Montrer que le degré de g_M, pour $M > 0$ suffisamment grand, est égal au degré du polynôme f. (Indication intuitive : pour M très grand, l'effet des termes de degré plus bas dans f est 'négligeable'.)
5. Conclure.

Indications:

1. Si $0 \notin \mathbf{Im}(f)$, alors $1/f$ est une fonction entière (*i.e.* holomorphe sur $\mathbf{C}$), bornée, donc constante d'après le théorème de Liouville.

2. Reparamétriser l'intervalle $[t_1, t_2]$ par l'intervalle standard I.

3. Comme g_0 est une application constante, $\mathbf{deg}(g_0) = 0$.

4. On suppose que $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Pour M assez grand, on vérifier aisément que

$$\begin{array}{rcl} H : \mathbb{S}^1 \times I & \to & \mathbf{C}^* \\ e^{i\theta} & \mapsto & a_n(Me^{i\theta})^n + t(a_{n-1}(Me^{i\theta})^{n-1} + \cdots + a_0) \end{array}$$

est une homotopie entre $z \mapsto f(Me^{i\theta})$ et $z \mapsto a_n(Me^{i\theta})^n$. Donc à une rotation près, pour M assez grand, g_M est homotope au morphisme $z \mapsto z^n$, qui est de degré n.

5. On déduit de 2 que le degré de g_t est indépendant de $t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, ainsi toujours égal à 0 comme $\mathbf{deg}(g_0) = 0$. Grâce à 4, on obtient que f est un polynôme de degré 0, *i.e.* un polynôme constant.

Exercice 4.3 (Graphes) Un *graphe fini* (orienté) est la donnée de deux ensembles finis V, E munis de deux applications $s, b : E \to V$. On lui associe un espace topologique $G = G(V, E, s, b : E \to V)$ comme l'espace quotient $G := E \times I \sqcup V / \sim$ où la relation d'équivalence est engendrée par $e \times 0 \sim s(e), e \times 1 \sim b(e)$ pour tout $e \in E$. On appelle V l'ensemble des *sommets*, E l'ensemble des *arêtes*, et s, b sont des morphismes qui associent une arête son source et son but. Donner l'algorithme pour le groupe fondamental d'un graphe fini connexe.

Indications:
Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. On considère un arbre maximal A dans G. La connexité de G implique que A a $|V|$ sommets, donc $|V| - 1$ arêtes (en général, le nombre d'arêtes d'un arbre connexe est toujours 1 moins de cela de sommets). Par Critère I, on peut contracter A dans G sans variant le type d'homotopie de G. Donc on arrive à un graphe fini connexe, d'un seule sommet, avec $|E| - |V| + 1$ arêtes, autrement dit, un bouquet

$$\bigvee^{|E|-|V|+1} \mathbb{S}^1.$$

Donc le groupe fondamental est un groupe libre de $(|E| - |V| + 1)$ lettres.

Exercice 4.4 (Réalisations topologiques) Montrer que tout groupe peut être réalisé comme le groupe fondamental d'un espace topologique.

Indications:
On fixe une présentation $G = \langle g_i, i \in I | r_j, j \in J\rangle$ où g_i sont des générateurs, et r_j sont des relations. On fait chaque générateur g_i correspond à un cercle $\mathbb{S}^1_i$ et chaque relation r_j correspond à un disque $\mathbb{D}^2_j$. L'espace topologique qu'on cherche peut être construit comme le bouquet des $\mathbb{S}^1_i$, $i \in I$ avec les disques $\mathbb{D}^2_j$ attachés au bouquet selon l'expression de r_j en terme de g_i.

Exercice 4.5 (Surfaces de Riemann) Soit S une surface orientable compacte de genre g, soient $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ deux ensembles disjoints de points distincts de S.

1. Rappeler le calcul du groupe fondamental de la surface de Riemann S.
2. Calculer le groupe fondamental de la surface de Riemann à n points enlevés $S - X$.
3. Calculer le groupe fondamental de l'espace quotient S/Y.
4. Finalement, calculer le groupe fondamental de $(S - X)/Y$.

Indications:

1. Par la présentation par un polygone de $2g$ cotés et le principe d'attachement de cellule. On obtient que

$$\pi_1(S) = \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1\rangle.$$

2. Utiliser toujours la présentation de polygone, on voit que l'effet homotopique d'enlever un point est de faire disparaitre le 2-cellule, et l'effet d'enlever chaque fois un point de plus est de rajouter de plus une diagonale au polygone. En conséquence :

$$\pi_1(S - X) = \pi_1(\bigvee^{2g+n-1} \mathbb{S}^1) = \mathbb{F}_{2g+n-1},$$

le groupe libre de $(2g+n-1)$ lettres.

3. C'est un fait général que à équivalence d'homotopie près, identifier m points distincts qui sont dans la même composante connexe par arc est la même de faire le bouquet avec $(m-1)$ cercles. En conséquence :

$$\pi_1(S/Y) = \pi_1(S \vee \bigvee^{m-1} \mathbb{S}^1) = \pi_1(S) * \mathbb{F}_{m-1},$$

ou plus concrètement,

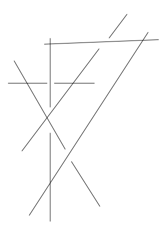
$$\pi_1(S/Y) = \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c_1, \cdots, c_{m-1} | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

4. En combinant 2 et 3, on conclut que $(n, m \geq 1)$

$$\pi_1((S-X)/Y) = \pi_1(\bigvee^{2g+n+m-2} \mathbb{S}^1) = \mathbb{F}_{2g+n+m-2}.$$

Exercice 4.6 (Configurations de droites dans $\mathbf{R}^3$) On s'intéresse à classifier les configurations de plusieurs droites distinctes dans $\mathbf{R}^3$ à 'isotropie' près. Une stratégie fondamentale est d'étudier l'espace complémentaire. L'observation que le complémentaire est essentiellement de dimension 1 nous implique que le groupe fondamentale est un outil utile.

1. Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la réunion de deux droites distinctes dans $\mathbf{R}^3$ (distinguer les cas où les droites sont disjointes, sécantes en un point).
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la réunion de n droites disjointes dans $\mathbf{R}^3$.
3. Soit $n \geq 1$ un entier. Si on a n droites distinctes passant par l'origine dans $\mathbf{R}^3$. Calculer le groupe fondamental du complémentaire.
4. Classifier toutes les configurations de trois droites distinctes dans $\mathbf{R}^3$. On pourrait utiliser le groupe fondamental, mais on remarque que dans ce cas de trois droites, les différentes configurations sont déjà distinguées par un invariant plus naïf, notamment le *nerf d'incidence*, *i.e.* le complexe simplicial donné par l'information d'incidence de droites.
5. Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la configuration suivante :



Indications:

1. Cas disjointes : le complémentaire de deux droites disjointes dans $\mathbf{R}^3$ est homotope au complémentaire de deux points distincts dans $\mathbf{R}^2$, donc homotope à un bouquet de deux cercles, dont le groupe fondamental est le groupe libre de deux lettres.

Cas sécantes : le complémentaire de deux droites sécantes dans $\mathbf{R}^3$ est homotope au complémentaire de quatre points distincts dans la sphère $\mathbb{S}^2$, qui est homotope à un bouquet de trois cercles, dont le groupe fondamental est $\mathbb{F}_3$.

2. Comme dans le premier cas de 1, il est homotope au complémentaire de n points dans $\mathbf{R}^2$, donc le groupe fondamental est le groupe libre de n lettres.

3. Comme dans le deuxième cas de 1, on utilise la rétraction radicale pour conclure que cet espace est homotope au complémentaire de $2n$ points distincts dans la sphère $\mathbb{S}^2$. D'où, le groupe fondamental est le groupe libre de $(2n-1)$ lettres.

4. D'après 2, si les trois droites sont disjointes, le groupe fondamental du complémentaire est $\mathbb{F}_3$.

D'après 3, si les trois droites passent un point commun, le groupe fondamental du complémentaire est $\mathbb{F}_5$.

Si deux droites sont sécantes et l'autre est disjointe. Par un argument similaire, on voit que le complémentaire est homotope au bouquet $(\mathbb{S}^2-\{A,B,C,D\})\vee(\mathbb{S}^2-\{E,F\})$, donc le groupe fondamental est $\mathbb{F}_4$.

S'il y a deux paires d'incidence, alors le complémentaire est homotope à deux copies de ($\mathbb{S}^2-4$ disques disjoints) recollés selon le bord d'un disque de chacun, autrement dit, c'est une sphère avec 6 disques disjoints enlevés, dont le groupe fondamental est $\mathbb{F}_5$.

Si les trois droites sont dans une même plan, et forment un triangle non-dégénéré. Alors le complémentaire est homotope à un tore avec 6 points enlevés et le cercle au milieu identifié en un point, qui est homotope à un bouquet de 6 cercle. D'où, le groupe fondamental du complémentaire est $\mathbb{F}_6$.

5. On imagine comme dans le dernier cas de 4. On voit que le complémentaire de la figuration à gauche est homotope à deux copies de $(T-\{6\text{points}\})$ recollés selon ses deux cercles 'distingués' pour les tores, par le théorème de Van-Kampen, son groupe fondamental $\mathbb{F}_{12}$. Mais le complémentaire de la figuration à droite est homotope à le bouquet de deux copies de $(T-\{6\text{points}\}$ modulo le cercle au milieu), donc le groupe fondamental est $\mathbb{F}_{12}$

Exercice 4.7 (Enlacement de deux cercles dans $\mathbf{R}^3$) Classifier les différentes relations topologiques possibles entre deux cercles plongés dans l'espace ambiant $\mathbf{R}^3$.

Indications:

On peut prendre comme l'invariant la classe d'un cercle dans le groupe fondamental du complémentaire de l'autre cercle.

Exercice 4.8 (H-espaces) Un *H-espace* est par définition un espace topologique pointé (X, e) muni d'un morphisme(*i.e.* une application continue pointée) $\mu : X \times X \to X$, telle que les deux morphismes $\mu(e, \bullet) : X \to X$, $\mu(\bullet, e) : X \to X$ sont homotopes à l'identité de X relative à e. (X, e) est dit *associatif*(ou plus précisément associatif *homotopique*), si le diagramme suivant commute à homotopie près :

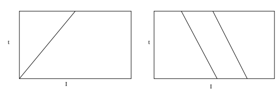
$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

1. Montrer qu'un groupe de Lie admet une structure naturelle de H-espace associatif.
2. On rappelle que *l'espace des lacets* d'un espace topologique pointé (Y, y) est l'ensemble des lacets en y dans Y, muni de la topologie compacte-ouverte, noté ΩY. Montrer que ΩY est un H-espace associatif.
3. Soit (Y, y) un espace topologique pointé, soient $f, g : [0, 1] \to Y$ deux lacets en y dans Y. On dispose deux 'produits' de f et g : d'une part, on a la composition des lacets $f \bullet g$, d'autre part, on peut considérer le lacet $f * g$ défini par $f * g(t) = \mu(f(t), g(t))$. Montrer que $f \bullet g$ et $f * g$ sont homotopes relativement aux extrémités.
4. On en déduit que le groupe fondamental d'un H-espace est abélien.

Indications:

1. On prend le morphisme de multiplication $G \times G \to G$ comme le μ dans la définition de H-espace. La multiplication est par définition associative (au sens strict).

2. $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ est défini par la conjonction de deux lacets, ici on prend la reparamétrisation de l'intervalle $[0, 2]$ par I de vitesse uniforme. Pour la condition d'élément neutre et l'associativité, on prend les homotopies indiquée par les dessins suivants :



3. D'abord, on remarque que le produit $*$ évidemment préserve l'équivalence d'homotopie. On note c_e le lacet constant à e, alors :

$$f * g \sim_{\text{rel}} (f \bullet c_e) * (c_e \bullet g) = (f * c_e) \bullet (c_e * g) \sim_{\text{rel}} f \bullet g.$$

4. Par un argument analogue

$$f * g \sim_{\text{rel}} (c_e \bullet f) * (g \bullet c_e) = (c_e * g) \bullet (f * c_e) \sim_{\text{rel}} g \bullet f,$$

en combinant le résultat de 3, on obtient la commutativité du produit dans le groupe fondamental.

Exercice 4.9 (Théorème de Borsuk-Ulam) Le théorème de Borsuk-Ulam affirme que pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbf{R}^n$, il existe toujours deux points antipodaux $x_1 = -x_2 \in \mathbb{S}^n$ avec le même image $f(x_1) = f(x_2) \in \mathbf{R}^n$. On se propose de le démontrer pour $n = 1$ et 2.

1. Montrer le théorème de Borsuk-Ulam en dimension 1 ;
2. Supposons $n = 2$, sous l'hypothèse de l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, construire une application $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ qui envoie l'antipode à l'antipode : $g(-x) = -g(x)$;
3. Restreignant g sur un grand cercle $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{S}^2$, montrer que le morphisme $g|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ n'est pas homotope au morphisme constant ;
4. Conclure.

Montrer que l'assertion *géographique* suivante : à chaque instant, il toujours existe deux points antipodaux de la Terre ayant exactement la même température et la même pression atmosphérique.

Indications:

1. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

2. On peut prendre g comme :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{S}^2 & \to & \mathbb{S}^1 \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|} \end{array}$$

3. On remarque que $g|_{\mathbb{S}^1}$ est aussi une application impaire. On considère le relèvement de cette application $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, qui envoie 0 à 0. Par l'hypothèse, elle satisfait

$$\phi(x + 1/2) - \phi(x) - 1/2 \in \mathbf{Z}.$$

Comme ϕ est continue et $\mathbf{Z}$ est discret, il existe $m \in \mathbf{Z}$, tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\phi(x + 1/2) - \phi(x) - 1/2 = m.$$

D'où, $\deg(\phi) = \phi(1) = \phi(1/2) + 1/2 + m = (\phi(0) + 1/2 + m) + 1/2 + m = 2m + 1$. Donc ϕ est de degré impair, en particulier, non-nul. Ceci implique que il n'est pas homotope à une application constante.

4. D'après 3, $g|_{\mathbb{S}^1}$ n'est pas homotopiquement trivial, mais on sait qu'il prolonge en un morphisme $g : \mathbb{D}^2 \simeq \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{S}^1$, qui implique exactement que $g|_{\mathbb{S}^1}$ est homotope à un morphisme constant, on arrive à une contradiction.

Exercice 4.10 Soient A_1, A_2, A_3 trois sous-espaces fermés de $\mathbb{S}^2$, tels que l'union recouvre $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe un A_i qui contient une paire de points antipodaux.

Indications:
On applique le théorème de Borsuk-Ulam aux fonctions définies par

$$f_i(x) := \min_{y \in A_i} dist(x, y).$$